PROVA DISCURSIVA DE CONHECIMENTOS ESPECÍFICOS

EXPECTATIVA DE RESPOSTA - P01-ÁLGEBRA LINEAR E CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

QUESTÃO 1

Para responder, plenamente, à questão, o candidato pode realizar:

Para o item **a**: prova direta, supondo que T é injetora e que $\{u_1, \ldots, u_n\}$ é L.I. em U para mostrar que $\{T(u_1), \ldots, T(u_n)\}$ é L.I. em V. Para tanto, considera-se uma combinação linear nula $a_1T(u_1) + \cdots + a_nT(u_n) = 0_V$ em V, com $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Logo, por T ser linear, a igualdade anterior pode ser reescrita como $T(a_1u_1 + \cdots + a_nu_n) = T(0_U)$. Por outro lado, dado que T é injetora, por hipótese, então $a_1u_1 + \cdots + a_nu_n = 0_U$ e, portanto, $a_1 = \ldots = a_n = 0$, pois $\{u_1, \ldots, u_n\}$ é L.I. em U, também por hipótese. Com isso tem-se que a única $\mathbb{R}$-combinação linear nula de vetores de $\{T(u_1), \ldots, T(u_n)\}$ é aquela em que os escalares são todos iguais a zero, o que é suficiente para concluir a prova.

Para o item **b:** prova indireta, supondo que T é injetora para concluir que $\dim U \leq \dim V$ através do resultado obtido no item **a**. De fato, se T é injetora e se $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ é uma base de U, então B é um conjunto L.I. em U e, por T ser injetora, pode-se aplicar o resultado de **a**. para concluir que $T(B) = \{T(u_1), \ldots, T(u_n)\}$ é um conjunto L.I. em V. Se $T(B)$ gera V, então ele é uma base de V com n vetores e, portanto, $\dim U = \dim V$. Caso contrário, pelo Teorema do Completamento de Base, existe uma base C do espaço V que contém (propriamente) $T(B)$ e, neste caso, $\dim U < \dim V$. Isto é suficiente para concluir a prova.

QUESTÃO 2

Para responder plenamente à questão, o candidato deverá comprovar a tese para os extremos e para o interior do intervalo $[a, b]$.

- Para os extremos do intervalo $[a, b]$, poderá utilizar o Teorema do Valor Médio (TVM) e a hipótese $f' \equiv 0$ em (a, b) para concluir que $f(b) = f(a)$.
- Para o interior do intervalo $[a, b]$, poderá utilizar o Teorema do Valor Médio (TVM), aplicado a um subintervalo $[a, x]$ ou $[x, b]$ e a hipótese $f' \equiv 0$ em (a, b) para concluir que $f(x) = f(a) = k$ ou $f(x) = f(b) = k$, respectivamente.