PROVA DISCURSIVA DE CONHECIMENTOS ESPECÍFICOS
EXPECTATIVA DE RESPOSTA - P19-MATEMÁTICA

QUESTÃO 1

Para responder completamente a questão, o candidato deverá calcular os pontos de interseção entre as funções, de modo a representar os gráficos das três funções no plano cartesiano, destacando a região delimitada do jardim e calculando corretamente a sua área. O candidato não deve esquecer de utilizar a unidade indicada no enunciado, conforme o exemplo de resposta abaixo.

Determinando os pontos de interseção entre as funções:

Entre $x = 0$ e $y = cos\,(x)$
$y = cos\,(x) \;\rightarrow\; y = cos\,(0) = 1$ *Interseção no ponto (0, 1)*

Entre $x = 0$ e $y = x - \frac{\pi}{2}$
$y = x - \frac{\pi}{2} \;\rightarrow\; y = 0 - \frac{\pi}{2} \;\rightarrow\; y = -\frac{\pi}{2}$ *Interseção no ponto* $\left(0, -\frac{\pi}{2}\right)$

Entre $y = x - \frac{\pi}{2}$ e $y = cos\,(x)$
$x - \frac{\pi}{2} = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2}$
$y = cos\,(x) \rightarrow cos\,(\frac{\pi}{2}) = 0$ *Interseção no ponto* $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

Calculando a área:

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos(x) - \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) dx$$

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos(x) - x + \frac{\pi}{2}\right) dx$$

$$S = \left(sen(x) - \frac{x^2}{2} + \frac{\pi}{2}x\right)$$

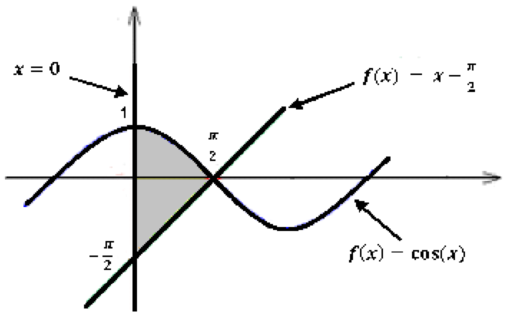
$$S = \left(sen\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2} + \frac{\pi}{2}.\frac{\pi}{2}\right) - \left(sen(0) - \frac{0^2}{2} + \frac{\pi}{2}.0\right)$$

$$S = \left(1 - \frac{\pi^2}{2.2^2} + \frac{\pi^2}{2^2}\right) - 0$$

$$S = 1 - \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{4} = 1 + (-1 + 2).\frac{\pi^2}{8}$$

$$S = 1 + \frac{\pi^2}{8}\ unidades\ de\ área\ ou\ u.a.$$

Representando no plano cartesiano:



QUESTÃO 2

Para responder completamente a questão, o candidato deverá determinar o domínio da função, resolver a inequação $\cos(4x) + 1 \neq 0$ e encontrar o período e a imagem de f, conforme o exemplo de resposta a seguir:

a) Como $f: D \to R$ é uma função, deve-se ter:

$$\cos(4x) + 1 \neq 0$$
$$\cos(4x) \neq -1$$

Logo,

$$4x \neq \pi + 2k\pi, \qquad k \in Z$$
$$x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \ \ k \in Z$$

Portanto, $D = \left\{x \in R / \ x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \ \ k \in Z\right\}$

b) Para analisar o período e a imagem da função, inicialmente simplifica-se a expressão $\frac{sen(2x)+sen(6x)}{\cos(4x)+1}$ e se obtém:

$$\frac{sen(4x - 2x) + sen(4x + 2x)}{\cos(4x) + 1}$$

Aplicando soma de arcos e continuando a operação:

$$\frac{sen(4x)\cos(2x) - sen(2x)\cos(4x) + sen(4x)\cos(2x) + sen(2x)\cos(4x)}{cos(4x) + 1} =$$
$$= \frac{2 \cdot sen(4x)\cos(2x)}{\cos(4x) + 1}$$

Da relação $\cos(4x) = \cos(2 \cdot 2x) = cos^2(2x) - sen^2(2x)$ e da relação fundamental $sen^2(2x) + cos^2(2x) = 1$ obtem-se a identidade $\cos(4x) + 1 = 2cos^2(2x)$.

Da identidade $sen(4x) = 2sen(2x)\cos(2x)$, tem-se

$$\frac{2 \cdot 2 \cdot sen(2x)\cos(2x)\cos(2x)}{2 \cdot cos^2(2x)} = 2 \cdot sen(2x)$$

Considerando que o período de uma função $sen(nx)$ é $\frac{2\pi}{|n|}$, o período de f será π.

A função seno tem imagem $[-1, 1]$, logo

$$-1 \leq sen(2x) \leq 1$$
$$-2 \leq 2 \cdot sen(2x) \leq 2$$

Como a função $f(x) = \frac{sen(2x)+sen(6x)}{\cos(4x)+1}$ não existe para $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \ \ k \in Z$, então

$$-2 < f(x) < 2$$

Portanto, $Im(f) =]-2, 2[$